Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen

Habilitationsschrift
zur Erlangung der Venia legendi
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

vorgelegt von
Dr. Wilhelm Kaup

1966

Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dekan: Univ.- Prof. Dr. E. Wirth

1. Berichterstatter: Univ.- Prof. Dr. R. Remmert
2. Berichterstatter: Univ.- Prof. Dr. H. Bauer

Tag des Colloquiums: 29. 6. 1966

Tag der Probevorlesung: 13. 7. 1966

Sonderdruck aus: Inventiones math. 3,
43 - 70 (1967)

Inventiones math. 3, 43—70 (1967)

Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen*

W. KAUP (Erlangen)

Einleitung und Inhalt

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Frage, auf welche komplexen Räume der folgende Satz von CARTAN (vgl. [10]) verallgemeinert werden kann: Für jedes beschränkte Gebiet D über dem C^n ist die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D)$ eine (reelle) Liegruppe.

Dazu wird in § 2 gezeigt:

Für jede stetige Metrik auf einem irreduziblen komplexen Raum ist die Gruppe aller biholomorphen Isometrien eine Liegruppe in der KO-Topologie.

Da auf jedem beschränkt K-vollständigen (vgl. § 2) komplexen Raum eine stetige Metrik existiert, die unter allen Automorphismen invariant ist (im wesentlichen die Carathéodory-Metrik), folgt daraus insbesondere:

Für jeden beschränkt K-vollständigen komplexen Raum, der in endlich viele irreduzible Komponenten zerfällt, ist die Automorphismengruppe eine Liegruppe.

Die für beschränkte Gebiete $D \subset C^n$ bekannte ([10]) Abschätzung $\dim(\mathrm{Aut}(D)) \leqq n(n+2)$ gilt auch für jeden irreduziblen beschränkt K-vollständigen komplexen Raum der komplexen Dimension n, wobei das Gleichheitszeichen nur für die Einheitshyperkugel H_n im C^n angenommen wird. Das ergibt sich mit Hilfe der Carathéodory-Metrik unmittelbar aus dem folgenden Satz:

Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der komplexen Dimension n und G eine Liegruppe, die effektiv und stetig auf R operiert. Gibt es eine stetige G-invariante Metrik auf R, so gilt

1. $\dim G \leqq n(n+2)$,

2. $\dim G = n(n+2)$ *bis auf Isomorphie genau dann, wenn*

α) $R =$ *Einheitshyperkugel* H_n *im* C^n *und* $G = \mathrm{Aut}(H_n)$ *oder*

β) $R = C^n$ *und* $G = \{z \to uz + b : u \in \boldsymbol{U}(n), b \in C^n\}$ *oder*

γ) $R =$ *komplex-projektiver Raum* P_n *und* G *eine maximal kompakte Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(P_n)$ *ist*

3. $\dim G \leqq n^2$, *wenn G nicht transitiv auf R operiert.*

* Die vorliegende Arbeit stellt die in einigen Punkten ergänzte und abgeänderte Habilitationsschrift des Verfassers dar.

Wesentliches Hilfsmittel für diese Sätze sind die in § 1 gewonnenen Ergebnisse über kompakte Transformationsgruppen. Es wird u.a. für jeden irreduziblen komplexen Raum R der komplexen Dimension n und jede kompakte Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ gezeigt:

(1) *Besitzt G einen Fixpunkt in R, so gilt* $\dim G \leqq n^2$; *ist R normal, so gilt das Gleichheitszeichen bis auf Isomorphie genau dann, wenn ein $\boldsymbol{U(n)}$-invariantes Gebiet H im P_n und ein endlicher Normalteiler Σ in $\boldsymbol{U(n)}$ existiert mit $R = H/\Sigma$ und $G = \boldsymbol{U(n)}/\Sigma$.*

(2) *Ist G abelsch, so gilt* $\dim G \leqq 2n$; *das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn R ein komplexer Torus und G die Einskomponente von* $\mathrm{Aut}(R)$ *ist. Besitzt G zusätzlich einen Fixpunkt in R, so gilt* $\dim G \leqq n$.

In § 3 werden holomorphe Kontraktionen bezüglich stetiger Metriken auf komplexen Räumen untersucht. Für den Spezialfall der invarianten Metrik auf einem beschränkten Gebiet D über dem C^n ergeben sich daraus wohlbekannte Sätze von CARTAN und CARATHÉODORY.

Der eingangs zitierte Satz von CARTAN hat zur Folge, daß auf jedem beschränkten homogenen Gebiet $D \subset C^n$ eine zusammenhängende Liegruppe transitiv operiert, etwa die Einskomponente von $\mathrm{Aut}(D)$. An Beispielen für jedes $n \geqq 2$ wird zum Schluß gezeigt, daß diese Aussage für beliebige homogene Gebiete im C^n nicht mehr richtig ist.

Es sei mir gestattet, meinem Lehrer Herrn Professor R. REMMERT für das Interesse an der Arbeit und für fortwährende Unterstützung zu danken.

§ 1. Eigentliche Transformationsgruppen

Wir wollen im folgenden komplexe Räume im Sinne von SERRE betrachten (d.h. reduzierte komplexe Räume im Sinne von [*14*]). Für je zwei komplexe Räume R und S sei $\mathrm{Hol}(R, S)$ die Menge aller holomorphen Abbildungen von R in S versehen mit der *KO-Topologie* (das ist die gröbste Topologie, so daß für jedes Kompaktum $K \subset R$ und jedes offene $0 \subset S$ die Menge $(K, 0) := \{g \in \mathrm{Hol}(R, S) : g(K) \subset 0\}$ offen ist). Speziell ist $\mathrm{Hol}(R) := \mathrm{Hol}(R, R)$ eine topologische Halbgruppe, die die Gruppe $\mathrm{Aut}(R)$ aller Automorphismen von R als topologische Untergruppe enthält.

Die Menge S aller singulären Punkte von R ist eine dünne analytische Teilmenge von R, die unter jedem Automorphismus von R invariant ist. Das Komplement $M = R - S$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, die ebenfalls invariant ist unter $\mathrm{Aut}(R)$; und vermöge der Zuordnung $g \to g|M$ kann $\mathrm{Aut}(R)$ als topologische Untergruppe von $\mathrm{Aut}(M)$ aufgefaßt werden. Ist $\tilde{R}$ die Normalisierung von R und $\tau : \tilde{R} \to R$ die zugehörige Normalisierungsabbildung, so gibt es zu jedem $g \in \mathrm{Aut}(R)$ genau ein $\tilde{g} \in \mathrm{Aut}(\tilde{R})$ mit $\tau \circ \tilde{g} = g \circ \tau$, und die Zuordnung $g \to \tilde{g}$ liefert einen topologischen Isomorphismus von $\mathrm{Aut}(R)$ auf eine abgeschlossene

Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\tilde{R})$ (das folgt einfach aus der Tatsache, daß τ eine diskrete eigentliche[1] Abbildung ist).

Wir sagen, daß eine topologische Gruppe G *stetig auf einem komplexen Raum* R *operiert*, wenn ein stetiger Homomorphismus $\Phi\colon G \to \mathrm{Aut}(R)$ gegeben ist. Das Paar (G, Φ) wollen wir auch eine *stetige Transformationsgruppe auf* R nennen. (G, Φ) heißt *effektiv*, wenn $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathbf{1}$ gilt, und *transitiv*, wenn für einen Punkt p in R die Bahn $G(p) := \{gp : g \in G\}$ mit R übereinstimmt (wenn klar ist, um welches Φ es sich handelt, schreiben wir statt (G, Φ) einfach G und statt $\Phi(g)p$ einfach gp). Für jeden Punkt p aus R sei $G_p := \{g \in G : gp = p\}$ die *Isotropiegruppe* von G in p. Eine lokal-kompakte Gruppe G, die stetig und effektiv auf einem irreduziblen komplexen Raum R operiert, ist immer schon eine Liegruppe, und die durch $(g, x) \to gx$ definierte Wirkabbildung $G \times R \to R$ ist für jede Liegruppe G reell-analytisch (vgl. [*3*, *16*]). Operiert auf einem komplexen Raum R eine Transformationsgruppe transitiv, so ist natürlich R eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Eine stetige Transformationsgruppe (G, Φ) auf R heißt eine *eigentliche Transformationsgruppe*, wenn die durch $(g, x) \to (gx, x)$ definierte Abbildung $G \times R \to R \times R$ eigentlich[1] ist (vgl. [*5*]). Jede kompakte Transformationsgruppe ist insbesondere eine eigentliche Transformationsgruppe. Es ist nun wohlbekannt:

Bemerkung 1.1. *Ist R ein komplexer Raum und $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine eigentliche Transformationsgruppe auf R, so gilt*

1. *G ist lokal-kompakt (d.h. G ist eine Liegruppe, wenn R in endlich viele irreduzible Komponenten zerfällt).*

2. *Für jeden Punkt $x \in R$ ist die Isotropiegruppe G_x kompakt.*

3. *Für jeden Punkt $x \in R$ ist die Bahn $G(x)$ abgeschlossen in R und topologisch äquivalent zu G/G_x.*

4. *R/G ist lokal-kompakt (und insbesondere hausdorffsch).*

5. *G ist kompakt, wenn R kompakt ist.*

Wir wollen im folgenden Dimensionsabschätzungen für eigentliche Transformationsgruppen gewinnen. Damit haben wir auch die Dimension einer komplexen Liegruppe L in der Hand, die holomorph auf einem komplexen Raum operiert und Komplexifizierung einer eigentlich operierenden Untergruppe ist. Insbesondere ergeben sich somit Dimensionsabschätzungen für reduzierte komplexe Transformationsgruppen (vgl. dazu auch [*19*]), denn jede reduzierte komplexe Liegruppe ist Komplexifizierung einer kompakten Untergruppe. Die Forderung, daß eine komplexe Liegruppe L zugleich holomorph und eigentlich auf R

[1] Eine stetige Abbildung heißt *eigentlich*, wenn das Urbild einer jeden kompakten Menge kompakt ist.

operiert, bedeutet eine große Einschränkung. Für jeden Punkt x in R ist dann nämlich die Isotropiegruppe L_x eine kompakte komplexe Untergruppe, und das Differential d_x: $L_x \to GL(T_x)$ ist als holomorphe Abbildung somit lokal-konstant auf L_x (vgl. Anhang I). Aus dem Cartanschen Eindeutigkeitssatz folgt für zusammenhängendes R und effektives L daraus bereits, daß alle Isotropiegruppen L_x endlich sein müssen. Wir wollen nun unter der Dimension eines komplexen Raumes stets die komplexe und unter der Dimension einer Gruppe stets die topologische Dimension verstehen. Damit gilt dann

Satz 1.2. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und G eine effektive eigentliche Transformationsgruppe auf R. Operiert G nicht transitiv auf R, so gilt* $\dim(G) \leqq n^2$.

Beweis. Es sei $p \in R$ ein Mannigfaltigkeitspunkt, $V = T_p(R)$ der Tangentialraum in p und $K := d_p(G_p) \subset GL(V)$ die *lineare Isotropiegruppe* von G in p (vgl. Anhang I). G_p ist als kompakte Gruppe isomorph zu K. Die Bahn $G(p)$ erzeugt in V einen K-invarianten reellen linearen Unterraum Θ. Wegen $G(p) \neq R$ kann $G(p)$ als abgeschlossene Teilmenge (vgl. Bemerkung 1.1 (3)) keinen inneren Punkt in R besitzen, d.h. $\Theta \neq V$. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

1. Fall. $d = \dim(\Theta + i\Theta) < n$. – Dann besitzt K einen invarianten komplexen Unterraum von V der Dimension d, und es folgt

$$\begin{aligned}\dim(G) &= \dim(K) + \dim G(p) \\ &\leqq (d^2 + (n-d)^2) + 2d \leqq n^2.\end{aligned}$$

2. Fall. $e = \dim(\Theta \cap i\Theta) > 0$. – Dann ist $e < n$ wegen $\Theta \neq V$, und wegen Fall 1 dürfen wir $\Theta + i\Theta = V$ annehmen, d.h. $\Theta \cap i\Theta \neq \Theta \neq V$. Folglich gilt $\dim(K) < e^2 + (n-e)^2$ und somit

$$\dim(G) \leqq \dim(K) + (2n-1) \leqq n^2.$$

3. Fall. $V = \Theta + i\Theta$ als direkte Summe reeller Unterräume. Dann ist Θ ein Vektorraum der reellen Dimension n, und jedes Element von K ist durch seine Werte auf Θ bereits eindeutig bestimmt, d.h. K kann als Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\mathbf{0}(n) \subset GL(n, R)$ auf Θ angesehen werden, und es folgt

$$\dim(G) \leqq \frac{n(n-1)}{2} + n \leqq n^2. \qquad \text{Q.e.d.}$$

Ist R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und $H \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine Untergruppe der Dimension $> n^2$, die eigentlich auf R operiert, so besagt Satz 1.2 gerade, daß H transitiv operiert. Dann ist insbesondere jedoch R eine komplexe Mannigfaltigkeit. Da für jeden

Punkt p in R die Isotropiegruppe H_p kompakt ist und somit eine nichtausgeartete Hermitesche Form auf dem Tangentialraum T_p invariant läßt, kann in diesem Fall R mit der Struktur einer Hermiteschen komplexen Mannigfaltigkeit so versehen werden, daß H eine Gruppe von Isometrien wird.

Ist die Gruppe G in Satz 1.2 insbesondere abelsch, so kann K als kompakte abelsche Untergruppe der $GL(n, C)$ höchstens die Dimension n besitzen, d.h. $\dim(G)<3n$. Diese Abschätzung ist jedoch nicht scharf, denn es gilt

Satz 1.3. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und $G\subset \mathrm{Aut}(R)$ eine abelsche Untergruppe, die eigentlich auf R operiert. Dann gilt* $\dim(G)\leqq 2n$; *dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn G eine zusammenhängende komplexe abelsche Liegruppe und R die G zugrundeliegende komplexe Mannigfaltigkeit ist, auf der G vermöge Translation operiert. Existieren q unabhängige holomorphe Funktionen auf R, die auf jeder Bahn $G(p)$ beschränkt sind, so gilt sogar* $\dim(G)\leqq 2n-q$. [*Ist G kompakt, so ist natürlich jede holomorphe Funktion auf jeder Bahn $G(p)$ beschränkt*].

Beweis. G ist eine reelle Liegruppe und erzeugt somit in der komplexen Liealgebra $\Delta(R)$ aller holomorphen Vektorfelder auf R eine reelle Unteralgebra Δ (vgl. [16] Satz 1). Es sei T die zur Unteralgebra $\Delta\cap i\Delta\subset\Delta(R)$ gehörige zusammenhängende Untergruppe von G. T ist eine abelsche komplexe Liegruppe, die holomorph auf R operiert. Ferner sei $p\in R$ ein festgewählter Mannigfaltigkeitspunkt, $V=T_p(R)$, $K=d_p\,G_p\subset GL(V)$ und Θ der von Δ in V erzeugte reelle Untervektorraum. Wegen $g(tp)=t(gp)=tp$ für alle $g\in G_p$ und $t\in G$ bleibt also Θ und damit auch $\Theta+i\Theta$ unter K punktweise fix. Setzen wir $d=\dim_c(\Theta\cap i\Theta)$ und $e=\dim_c(\Theta+i\Theta)$, so gilt also $\dim_r(\Theta)=\dim_r G(p)=e+d$ und damit

$$\dim(G)=\dim(K)+\dim\big(G(p)\big)\leqq(n-e)+(e+d)=n+d\leqq 2n\,.$$

Gilt $\dim(G)=2n$, so ist notwendig $d=n$, und T operiert transitiv auf R. Dann gilt aber $G=T=R$. – Nehmen wir jetzt an, $f=(f_1,\ldots,f_q)$ sei ein q-Tupel unabhängiger holomorpher Funktionen auf R, d.h. für jede offene Teilmenge $U\subset R$ besitze $f(U)\subset C^q$ innere Punkte. Wir dürfen annehmen, daß die analytische Menge $f^{-1}(f(p))$ im Punkte p genau die Dimension $n-q$ besitzt (vgl. [25]). Ist $f(G(p))\subset C^q$ beschränkt, so liefert die Zuordnung $t\to f(tp)$ eine beschränkte holomorphe Abbildung von T in den C^q, die notwendig konstant ist (wegen der Existenz genügend vieler einparametriger Untergruppen – die ja zur komplexen Zahlenebene isomorph sind – ist jede beschränkte holomorphe Funktion auf einer zusammenhängenden komplexen Liegruppe konstant). Also gilt $T(p)\subset f^{-1}(f(p))$, was $d\leqq n-q$ bzw. $\dim(G)\leqq 2n-q$ zur Folge hat.

Folgerung 1.4. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und G eine kompakte abelsche Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(R)$. *Besitzt G einen Fixpunkt in R, so gilt* $\dim(G) \leqq n$.

Beweis. R kann als normal angesehen werden. Man wähle dann eine zusammenhängende G-invariante holomorph-separable Umgebung des Fixpunktes und wende darauf Satz 1.3 an.

Man kann dieses Resultat auch mit Hilfe des projektiven Tangentenkegels (vgl. Anhang II) erhalten. Dazu zeigen wir zunächst

Hilfssatz 1.5. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum, $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine zusammenhängende kompakte Untergruppe mit Fixpunkt p in R und K eine irreduzible Komponente des projektiven Tangentenkegels in p. Dann operiert G mit einem Ineffektivitätskern I der Dimension $\leqq 1$ auf K.*

Beweis. Da G zusammenhängend ist, operiert G auf K; und wir dürfen annehmen, daß G auf einem irreduziblen komplexen Raum S der Dimension n operiert, wobei K eine analytische Teilmenge von S ist, die unter I punktweise fix bleibt. Wegen $\dim(K) = \dim(S) - 1$ können wir weiter annehmen, daß K und S in einem geeigneten Punkt $q \in K \subset S$ Mannigfaltigkeiten sind (sonst gehe man zur Normalisierung über). Speziell ist q ein Fixpunkt der kompakten Gruppe I, d.h. wegen des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes ist I isomorph zu einer kompakten Gruppe von linearen Transformationen eines komplexen Vektorraumes, die eine Hyperebene punktweise festhält, d.h. $\dim(I) \leqq 1$.

Damit können wir nun leicht den angekündigten zweiten Beweis von Folgerung 1.4 erbringen. Es sei also $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine kompakte abelsche Untergruppe mit Fixpunkt p und K eine irreduzible Komponente des projektiven Tangentenkegels in p. Wir dürfen G als zusammenhängend annehmen, d.h. G operiert mit einem Ineffektivitätskern I auf K. Als abelsche Gruppe von Kollineationen hat G einen Fixpunkt in K, d.h. für die Gruppe $Q = G/I$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\dim(Q) \leqq \dim(K)$, d.h. nach obiger Bemerkung $\dim(G) = \dim(I) + \dim(K) \leqq \dim(R)$. — Analog läßt sich als Spezialfall von Satz 1.2 zeigen, daß für jede kompakte Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ mit Fixpunkt die Abschätzung $\dim(G) \leqq n^2$ ($n = \dim(R)$) gilt. In der Tat, denn für einen Punkt $q \in K$ kann als Induktionsvoraussetzung $\dim(Q_q) \leqq (n-1)^2$ angenommen werden, d.h.

$$\begin{aligned}\dim(G) &= \dim(I) + \dim(Q_q) + \dim(Q/Q_q)\\ &\leqq 1 + (n-1)^2 + 2(n-1) = n^2.\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die folgenden Beispiele von komplexen Räumen R, die eine kompakte Gruppe der (maximal möglichen) Dimension n^2 mit Fixpunkt zulassen ($n = \dim R$):

Beispiel 1.6. Auf der Neilschen Parabel $z^2 - w^3 = 0$ im C^2 operiert die kompakte Gruppe (t reell)

$$(z, w) \to (e^{3it} z, e^{2it} w).$$

Beispiel 1.7. Auf der Kegelmenge

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

im C^3 operiert die 4-dimensionale kompakte Gruppe aller $e^{it}\lambda \in GL(3, C)$ mit t reell und λ reell-orthogonal. (In höheren Dimensionen liefert der entsprechende quadratische Kegel kein Beispiel).

Beispiel 1.8. Es sei $\boldsymbol{U(n)}$ die Gruppe aller unitären Transformationen des C^n und Σ ein diskreter Normalteiler von $\boldsymbol{U(n)}$ (d.h. es gibt eine natürliche Zahl $r \geqq 1$, so daß Σ aus allen Transformationen $z \to e^{2s\pi i/r} z$ besteht mit $s = 1, 2, \ldots, r$). Fassen wir C^n als affinen Teil des projektiven Raumes P_n auf, so operiert $\boldsymbol{U(n)}$ auch auf P_n, und der Quotientenraum $S_n^r = P_n/\Sigma$ trägt in natürlicher Weise eine normale komplexe Struktur, auf der die Gruppe $G = \boldsymbol{U(n)}/\Sigma$ als effektive Transformationsgruppe mit Fixpunkt operiert. Für $n > 1$ und $r > 1$ besitzt S_n^r genau einen singulären Punkt und es gilt $S_n^r \neq S_m^s$ für $(r, n) \neq (s, m)$. Das G-invariante Teilgebiet C^n/Σ von S_n^r kann als Kegel im C^{2n-1} dargestellt werden, was etwa durch die Abbildung

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (z_1^r, \ldots, z_n^r, z_1 z_2^{r-1}, z_1 z_3^{r-1}, \ldots, z_1 z_n^{r-1})$$

geleistet wird.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Aufzählung in diesem Beispiel (nebst invarianten Teilgebieten) für normale komplexe Räume bereits erschöpfend ist:

Satz 1.9. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und $G \subset Aut(R)$ eine kompakte Gruppe der Dimension n^2, die einen Fixpunkt in R besitzt. Dann gibt es im komplex projektiven Raum P_n ein $\boldsymbol{U(n)}$-invariantes Gebiet H, eine holomorphe diskrete Abbildung τ von H auf R und einen stetigen Homomorphismus α von $\boldsymbol{U(n)}$ auf G, so daß für jedes $u \in \boldsymbol{U(n)}$ das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{u} & H \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ R & \xrightarrow[\alpha u]{} & R \end{array}.$$

Wir wollen zunächst einige Folgerungen aus diesem Satz ziehen und dann einen gemeinsamen Beweis angeben:

Folgerung 1.10. *Ist R eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine kompakte Untergruppe der Dimension n^2 mit Fixpunkt in R, so sind (bis auf Isomorphie) nur die folgenden Fälle möglich:*

1. *$R = P_n$ und $G = \boldsymbol{U(n)}$;* 2. *$R = C^n$ und $G = \boldsymbol{U(n)}$;*
3. *$R =$* Einheitshyperkugel *H_n* im *C^n* und *$G = \boldsymbol{U(n)}$.*

Folgerung 1.11. *Ist R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine kompakte Untergruppe, so gilt $\dim(G) \leqq n(n+2)$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $R = P_n$ und G eine maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(P_n)$ ist.*

Beweis von Satz 1.9 und Folgerung. In Abhängigkeit von n wollen wir mit $\boldsymbol{A_n}$ die folgende lokale Form von Satz 1.9 bezeichnen:

Ist S ein zusammenhängender normaler komplexer Raum der Dimension n und $G \subset \mathrm{Aut}(S)$ eine kompakte Untergruppe der Dimension n^2 mit Fixpunkt p in S, so gibt es eine G-invariante Umgebung R von p, auf die der Satz 1.9 zutrifft. Ferner wollen wir mit $\boldsymbol{B_n}$ die Aussage von Satz 1.9 und mit $\boldsymbol{C_n}$ die Aussage der Folgerungen 1.10 und 1.11 bezeichnen. Wir wollen im folgenden Induktion nach n verwenden und zeigen:

$\boldsymbol{A_1}$: Dieser Fall ist trivial, denn S ist eine Riemannsche Fläche, auf der eine kompakte Gruppe G mit $\dim(G) = 1$ effektiv operiert. In einer geeigneten Umgebung H des Fixpunktes p kann eine lokale Koordinate z so eingeführt werden, daß G in H mit der Gruppe $\{z \to e^{it} z : t \text{ reell}\}$ übereinstimmt (vgl. Anhang I).

$\boldsymbol{A_n \Rightarrow B_n}$: Wir dürfen R als normal annehmen (sonst schalte man hinter die Abbildung $\tau: H \to R$ noch die Normalisierungsabbildung). Nach Voraussetzung gibt es ein $\boldsymbol{U(n)}$-invariantes Gebiet $H \subset P_n$, einen stetigen Homomorphismus α von $\boldsymbol{U(n)}$ auf G und eine holomorphe diskrete Abbildung $\tau: H \to R$ mit $\tau \circ u = \alpha(u) \circ \tau$ für alle u. $W = \tau(H)$ ist ferner eine G-invariante Umgebung des Fixpunktes p. Wir dürfen annehmen, daß H maximal gewählt ist in dem Sinne, daß die Abbildung $\tau: H \to R$ auf kein größeres $\boldsymbol{U(n)}$-invariantes Teilgebiet des P_n holomorph fortsetzbar ist. Nehmen wir an, daß der Satz falsch ist. Dann ist $R - W$ nicht leer und enthält einen Punkt, der durch eine Kurve γ mit p verbunden werden kann. Als Teilmenge der kompakten Menge $G(\gamma)$ ist somit W relativ-kompakt in R. Wäre $H = P_n$, so müßte $R = W$ gelten, d.h. $H \subset C^n \subset P_n$. Die Gruppe $L = GL(n, C)/\mathrm{Kern}(\alpha)$ enthält G als Untergruppe und operiert (wegen $\overline{W}$ kompakt) lokal holomorph auf W, das soll heißen, es gibt eine Umgebung Q der $\mathbf{1} \in L$ und eine holomorphe Abbildung $\Phi: Q \times W \to R$ mit $\Phi(g, q) = g(q)$ für alle $g \in G \cap Q$ und $q \in W$ (vgl. [16]). Also gibt es eine reelle Zahl $t > 1$ und eine biholomorphe Abbildung $\eta: W \to \eta(W) \subset R$

mit $\tau(tz)=\eta(\tau z)$ für alle $tz\in H$, d.h. τ kann zu einer holomorphen Abbildung $tH\to R$ fortgesetzt werden, d.h. $tH=H=C^n$. Die Gruppe G erzeugt eine Liealgebra Δ von holomorphen Vektorfeldern auf R (vgl. [16]). Die Menge N aller Punkte von R, in denen je n Felder aus Δ komplex-linear abhängig sind, ist analytisch in R und hat mit W nur den Punkt p gemein. Wegen $H=C^n$ kann oben $Q=L$ gewählt werden, und L operiert somit als komplexe Transformationsgruppe auf W, d.h. der Rand ∂W von W liegt in N. Da $R-N$ zusammenhängend ist, muß somit $\overline{W}=R$ gelten, d.h. R ist kompakt. Insbesondere operiert damit L auch holomorph auf R. Es sei jetzt Γ eine komplexe Gerade in C^n durch den Nullpunkt. Die abgeschlossene Hülle $\bar{\Gamma}$ von Γ in P_n ist isomorph zum P_1. Die Menge aller Fixpunkte der Gruppe $\{g\in G: g(x)=x \text{ für alle } x\in\tau(\Gamma)\}$ ist analytisch in R und stimmt in W mit $\tau(\Gamma)$ überein. Die Abbildung $\tau|\Gamma$ läßt sich also zu einer holomorphen Abbildung $\psi: \bar{\Gamma}\to R$ fortsetzen. Gilt nun $g(y)=h(y)$ für $g, h\in \boldsymbol{U(n)}$ und $0\neq y\in\bar{\Gamma}$, so auch $g(\Gamma)=h(\Gamma)$ und damit $\alpha(g)\,\tau(y)=\alpha(h)\,\tau(y)$, d.h. durch $g(y)\to\alpha(g)\,\tau(y)$ wird die Abbildung τ zu einer stetigen und damit holomorphen Abbildung $P_n\to R$ fortgesetzt, womit ein Widerspruch zu der obigen Annahme hergeleitet ist.

$\boldsymbol{B_n\Rightarrow C_n}$: trivial.

$\boldsymbol{C_n\Rightarrow A_{n+1}}$: Wir betrachten zuerst den Spezialfall, daß $S\subset C^m$ ein analytischer Kegel ist und $G\subset GL(m, C)$ gilt. Der zu S gehörige projektive Kegel $K\subset P_{m-1}$ ist irreduzibel und n-dimensional. G operiert auf K mit einem Ineffektivitätskern I der Dimension $\leqq 1$, d.h. auf K operiert eine kompakte Gruppe der Dimension $\geqq(n+1)^2-1=n(n+2)$ effektiv. Wegen $\boldsymbol{C_n}$ existiert somit eine biholomorphe Abbildung $\mu: P_n\to K$ und ein stetiger Homomorphismus $\sigma: G\to\mathrm{Aut}(P_n)$ mit $g\circ\mu=\mu\circ\sigma g$ für alle g aus G. $\sigma(G)$ ist eine maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(P_n)$, und wir können homogene Koordinaten $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ im P_n so auswählen, daß $\sigma(G)$ das Bild des kanonischen Homomorphismus $\boldsymbol{U(n+1)}\to\mathrm{Aut}(P_n)$ ist. Die Abbildung μ beschreibt sich in den Koordinaten $z=(z_0, \ldots, z_n)$ in der Form $z\to(p_1(z), \ldots, p_m(z))$, wobei $p_i(z)$ homogene Polynome eines festen Grades r sind. Die gleichen Polynome beschreiben eine diskrete holomorphe Abbildung τ von C^{n+1} auf $S\subset C^m$. Da $\boldsymbol{SU(n+1)}$ einfach-zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Homomorphismus α: $\boldsymbol{SU(n+1)}\to G$ mit $\tau\circ\alpha u=u\circ\tau$ für alle u in $\boldsymbol{SU(n+1)}$. Dieser Homomorphismus läßt sich zu einem stetigen Homomorphismus α von $\boldsymbol{U(n+1)}$ auf G mit den verlangten Eigenschaften erweitern, und wir dürfen $R=S$ annehmen. – Nehmen wir jetzt an, daß S ein beliebiger zusammenhängender normaler komplexer Raum ist. Für eine hinreichend kleine Umgebung R des Fixpunktes p dürfen wir annehmen, daß $p=0$ der Nullpunkt eines komplexen Vektorraumes V endlicher Dimension ist, daß R eine analytische Menge in einer Umgebung von 0 ist

und daß $G \subset GL(V)$ gilt (vgl. Anhang I, Satz 4.4). Es sei $C(R, p) \subset V$ der Tangentenkegel (vgl. Anhang II) von R in p und T der davon in V aufgespannte lineare komplexe Unterraum. Da T invariant ist unter G, gibt es einen weiteren invarianten linearen Unterraum $S \subset V$ mit $V = T \oplus S$ (als direkte Summe). Durch $g \to g|T$ für alle $g \in G$ wird ein stetiger Homomorphismus $\pi: G \to GL(T)$ definiert. Es sei nun $\varphi: R \to T$ die Beschränkung der kanonischen Projektion $T \oplus S \to T$ auf R. Da der Tangentenkegel ganz in T liegt, muß der Nullpunkt diskret in seiner Faser $\varphi^{-1}(0)$ liegen, d.h. nach eventueller Verkleinerung von R dürfen wir annehmen, daß φ eine diskrete Abbildung ist. Offensichtlich gilt $\varphi \circ g = \pi g \circ \varphi$ für alle $g \in G$. Wegen Satz 1.2 und Hilfssatz 1.5 operiert die Einskomponente G^0 von G transitiv auf jeder irreduziblen Komponente des projektiven Tangentenkegels K in p. Da K zusammenhängend ist, operiert also G transitiv auf K, und wir dürfen annehmen, daß $R^* = R - \{p\}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und keine G-invariante analytische Teilmenge A mit $\phi \neq A \neq R^*$ enthält. Die Menge aller Punkte von R^*, in denen die Abbildung φ nicht regulär ist, ist analytisch und invariant unter G, d.h. also leer. G operiert mit einem Ineffektivitätskern I der Dimension 1 auf K. Die Gruppe $I/\mathrm{Kern}(\pi)$ besitzt positive Dimension (wegen φ diskret) und operiert effektiv auf $\varphi(R)$, d.h. $\varphi(R)$ bleibt unter allen Transformationen $w \to e^{it} w$ von T invariant. In einer Umgebung des Nullpunktes von T stimmt deshalb $\varphi(R)$ mit einem analytischen Kegel in T überein. Auf $\varphi(R)$ operiert die kompakte Gruppe $G/\mathrm{Kern}(\pi)$ effektiv. Nach den obigen Überlegungen gibt es also eine Hyperkugel $H \subset C^{n+1}$, einen stetigen Homomorphismus α': $\boldsymbol{U(n+1)} \to G/\mathrm{Kern}(\pi)$ und eine diskrete holomorphe Abbildung τ': $H \to \varphi(R)$ mit den angegebenen Eigenschaften. Wegen $n > 0$ ist $H^* = H - \{0\}$ einfachzusammenhängend, und es existiert eine holomorphe Abbildung τ^*: $H^* \to R^*$ mit $\varphi \circ \tau^* = \tau' | H^*$. τ^* kann zu einer holomorphen Abbildung τ: $H \to R$ fortgesetzt werden. Der sich daraus ergebende Homomorphismus α: $\boldsymbol{U(n+1)} \to G$ erfüllt zusammen mit der Abbildung τ die Behauptung. Q.e.d.

Jede zusammenhängende kompakte homogene kählersche Mannigfaltigkeit ist nach [4] ein direktes Produkt eines Torus mit einer homogenen projektiv-rationalen Mannigfaltigkeit. Da für jede projektiv-rationale homogene komplexe Mannigfaltigkeit M die Gruppe $L = \mathrm{Aut}(M)$ halbeinfach ist und somit eine kompakte Untergruppe K mit $\dim(K) = \dim_c(L)$ enthält, folgt weiter (vgl. den Spezialfall in [18], p. 170 Corollaire).

Folgerung 1.12. *Der projektive Raum P_n besitzt unter allen zusammenhängenden kompakten kählerschen homogenen komplexen Mannigfaltigkeiten der Dimension n die größte Dimension der Automorphismengruppe, nämlich die komplexe Dimension $n(n+2)$.*

§ 2. Invariante Metriken

Nehmen wir an, auf dem komplexen Raum R sei eine stetige Metrik $\rho=\rho(x, y)$ gegeben. Für jede reelle Zahl $r>0$ und jedes $x\in R$ werde mit $Z_r(x)$ die Zusammenhangskomponente der Kugel $\{y\in R\colon \rho(x, y)<r\}$ bezeichnet, in der x liegt. Das System aller $Z_r(x)$ ist eine Basis der Topologie von R. Wir wollen eine holomorphe Abbildung $\varphi\colon R\to R$ eine *Kontraktion* (bez. ρ) nennen, wenn $\rho(\varphi x, \varphi y)\leqq\rho(x, y)$ für alle $x, y\in R$ gilt. Speziell sind also auch Isometrien als Kontraktionen zugelassen. Besteht eine Untergruppe $G\subset\mathrm{Aut}(R)$ aus lauter Isometrien (bez. ρ), so wollen wir die Metrik ρ auch *G-invariant* nennen. Beispiele für invariante Metriken erhält man durch die *Carathéodory-Metrik*, die im wesentlichen wie folgt skizziert werden kann (vgl. [*1*, *7*, *24*]): Es sei B der Banachraum (bez. der sup-Norm) aller beschränkten holomorphen Funktionen auf R, B' der Banachraum aller stetigen Linearformen auf B und $\chi\colon R\to B'$ die Abbildung, die jedem $x\in R$ die durch $l(f)=f(x)$ definierte stetige Linearform l zuordnet. Aus dem Satz von Montel folgt leicht, daß die Abbildung χ stetig ist. Zu jedem $g\in\mathrm{Aut}(R)$ existiert ein normtreuer linearer Automorphismus g^* von B' mit $\chi\circ g=g^*\circ\chi$. Trennt B die Punkte von R, so ist χ injektiv, und der komplexe Raum R werde *beschränkt separabel* genannt. Die Norm von B' induziert dann auf R eine stetige $\mathrm{Aut}(R)$-invariante Metrik, die wir die *Carathéodory-Metrik* nennen wollen (vgl. [*7*], p. 79). Ist die Abbildung $\chi\colon R\to B'$ diskret (z. B. wenn R ein beschränktes Gebiet über dem C^n ist), so werde R *beschränkt K-vollständig* genannt. Es gilt

Bemerkung 2.1. *Ist R ein beschränkt K-vollständiger komplexer Raum, so existiert eine stetige Metrik auf R, in der jeder Automorphismus eine Isometrie und jede innere Abbildung eine Kontraktion ist.*

Beweis. Für jedes x in R sei $\tilde{Z}_\varepsilon(x)$ die Zusammenhangskomponente von $\{y\in R\colon \|\chi x-\chi y\|<\varepsilon\}$, in der x liegt. Dann ist

$$\rho(x, y):=\inf\{\varepsilon>0\colon x\in\tilde{Z}_\varepsilon(y) \text{ und } y\in\tilde{Z}_\varepsilon(x)\}$$

eine stetige Metrik mit den verlangten Eigenschaften.

Weitere Beispiele für invariante Metriken liefern die *Bergmann-Metrik* (die sogar reell-analytisch ist) und

Bemerkung 2.2. *Ist $\rho(x, y)$ eine stetige Metrik auf dem komplexen Raum R und G eine kompakte Transformationsgruppe auf R, so ist*

$$\rho^*(x, y)=\int_G \rho(g x, g y)\, d\mu(g)$$

eine G-invariante stetige Metrik auf R ($\mu=$ Haarsches Maß).

Da jeder komplexe Raum mit abzählbarer Topologie metrisierbar ist, ergibt sich als Folgerung eines Theorems von PALAIS ([21]) über eigentliche Transformationsgruppen topologischer Räume eine Verallgemeinerung von Bemerkung 2.2.

Satz 2.3 (Palais). *Ist R ein komplexer Raum mit abzählbarer Topologie und G eine eigentliche Transformationsgruppe auf R, so gibt es eine G-invariante Metrik auf R, die mit der Topologie von R verträglich ist.*

Eine Umkehrung davon wollen wir aus dem folgenden Satz gewinnen:

Satz 2.4. *Es sei ρ eine stetige Metrik auf einem komplexen zusammenhängenden Raum R, σ eine stetige Metrik auf einem komplexen Raum S und $T \subset \mathrm{Hol}(R, S)$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $\sigma(tx, ty) \leqq \rho(x, y)$ für alle $x, y \in R$ und $t \in T$. Dann wird durch $(t, x) \to (tx, x)$ eine eigentliche Abbildung $T \times R \to S \times R$ definiert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Die Metrik σ ist vollständig.*

2. *Es gibt eine positive reelle stetige Funktion δ auf R, so daß für jedes $x \in R$, $t \in T$ und jedes positive $r < \delta(x)$ gilt $t(Z_r(x)) = Z_r(tx)$.*

Beweis[2]. Es genügt zu zeigen, daß für jedes Kompaktum $K_1 \subset R$ und jedes Kompaktum $K_2 \subset S$ die Menge $Q = \{t \in T: t(K_1) \cap K_2 \neq \phi\}$ kompakt ist. Es sei also $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ ein Ultrafilter auf Q und Ω die Menge aller $p \in R$, so daß die Filterbasis $\mathfrak{F}(p) = \{F_\alpha(p)\}$ in S konvergiert. Wir dürfen annehmen, daß der Durchmesser von K_1 so klein ist, daß eine kompakte Umgebung K_3 von K_2 in S existiert mit $Q(K_1) \subset K_3$, d.h. $K_1 \subset \Omega$. Mit dem gleichen Argument folgt, daß Ω offen und abgeschlossen in R ist: Denn ist $x \in \bar{\Omega}$, so wählen wir $y \in \Omega$, $q \in S$, $F \in \mathfrak{F}$, $t \in F$ und $\varepsilon > 0$ so, daß $x \in Z_\varepsilon(y)$, $F(y) \subset Z_\varepsilon(q)$ gilt und $Z_{4\varepsilon}(y)$ relativkompakt in R ist. Die Menge $K = Z_{4\varepsilon}(ty)$ ist relativ-kompakt in S, und zwar bei Gültigkeit von Bedingung 1 als Menge endlichen Durchmessers und bei Gültigkeit von Bedingung 2 wegen $K = t(Z_{4\varepsilon}(y))$ – wegen der Stetigkeit von δ dürfen wir nämlich $4\varepsilon < \delta(y)$ annehmen. Wegen $F(x) \subset F(Z_\varepsilon(y)) \subset Z_{2\varepsilon}(q) \subset Z_{3\varepsilon}(ty)$ gilt also $F(Z_\varepsilon(x)) \subset K$, d.h. $Z_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Also ist $\Omega = R$. Aus der Kontraktionseigenschaft aller Elemente von T folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{F}$ nicht nur bezüglich der punktweisen Konvergenz, sondern auch bezüglich der $K0$-Topologie auf Q konvergiert, und zwar gegen ein Element von Q.

Die Gruppe $I_\rho(R)$ aller biholomorphen Isometrien eines komplexen Raumes R mit stetiger Metrik ρ ist abgeschlossen in $\mathrm{Hol}(R)$; Satz 2.4 liefert deshalb unmittelbar (vgl. [12])

Satz 2.5. *Es sei R ein zusammenhängender komplexer Raum und G eine abgeschlossene Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(R)$, *die eine stetige G-invariante*

[2] Der Beweis benutzt die komplexe Struktur von R nicht.

Metrik auf R zuläßt. Dann ist G eine eigentliche Transformationsgruppe auf R (und besitzt somit die in Bemerkung 1.1 angegebenen Eigenschaften).

Folgerung 2.6. *Zerfällt der komplexe Raum R in endlich viele irreduzible Komponenten, so ist die Gruppe $I_\rho(R)$ aller biholomorphen Isometrien einer stetigen Metrik ρ auf R in der K0-Topologie eine Liegruppe.*

Satz 2.7. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und G eine Liegruppe, die effektiv und stetig auf R operiert. Existiert eine G-invariante stetige Metrik auf R, so gilt* $\dim(G) \leqq n(n+2)$, *und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle eintritt (bis auf Isomorphie):*

1. *R ist der Zahlenraum C^n und $G=\{z \to uz+b: u$ unitär, $b \in C^n\}$ (z.B. mit der euklidischen Metrik).*

2. *R ist die Hyperkugel H_n im C^n und* $G=\mathrm{Aut}(H_n)$ *(z.B. mit der Carathéodory-Metrik).*

3. *R ist der komplex-projektive Raum P_n und G ist eine maximal kompakte Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(P_n)$ *(z.B. mit einer Metrik entsprechend Bemerkung 2.2).*

Beweis. Es sei p ein Mannigfaltigkeitspunkt von R. Wir dürfen G als offene Untergruppe von $I_\rho(R)$ ansehen. Nach Satz 2.5 ist G eine eigentliche Transformationsgruppe, d.h. G_p ist kompakt und die Bahn $G(p)$ ist abgeschlossen in R. Also gilt $\dim(G) \leqq n^2+2n$. Gilt das Gleichheitszeichen, so ist notwendig $\dim(G_p)=n^2$ und $\dim(G(p))=2n$, d.h. $R=G(p)$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit. Aus Satz 4.10 (Anhang III) und Folgerung 1.10 folgt sodann die Behauptung.

Mit Hilfe von Bemerkung 2.1 ergibt sich daraus unmittelbar als Verallgemeinerung eines Satzes von CARTAN ([*10*]):

Satz 2.8. *Ist R ein beschränkt K-vollständiger komplexer Raum, der in endlich viele irreduzible Komponenten zerfällt, so ist* $\mathrm{Aut}(R)$ *in der K0-Topologie eine Liegruppe.*

Betrachten wir die im Einheitsdizylinder $|z|<1$, $|w|<1$ des C^2 durch

$$w \cdot \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)=0$$

definierte analytische Menge A. A ist ein zusammenhängender beschränkt separabler komplexer Raum, dessen Automorphismengruppe keine Liegruppe ist. Die Voraussetzung, daß R in höchstens endlich viele irreduzible Komponenten zerfällt, ist also auch für zusammenhängendes R in Satz 2.8 wesentlich. Weiter gilt nun

Satz 2.9. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n, auf dem n unabhängige beschränkte holomorphe Funktionen existieren.*

Operiert auf R eine Liegruppe G effektiv und stetig, so gilt $\dim(G) \leqq n(n+2)$. *Das Gleichheitszeichen wird dabei nur von der Hyperkugel H_n im C^n angenommen.*

Beweis. R besitzt ein dichtes, beschränkt K-vollständiges Gebiet, das invariant unter $\mathrm{Aut}(R)$ ist. Aus Bemerkung 2.1 und Satz 2.7 folgt dann die Behauptung.

Daß G in Satz 2.9 nur in trivialen Fällen eine komplexe Liegruppe sein kann, folgt mit einem Argument von [3] (vgl. dort Theorem 2):

Bemerkung 2.10. *Jede komplexe Liegruppe, die holomorph und effektiv auf einem beschränkt K-vollständigen komplexen Raum operiert, ist diskret.*

Beweis. G kann als zusammenhängend vorausgesetzt werden. Für jeden Punkt p des komplexen Raumes R liefert die Zuordnung $g \to gp$ eine holomorphe Abbildung $G \to R$. Nun ist jede beschränkte holomorphe Funktion auf G konstant, d.h. jede beschränkte holomorphe Funktion auf R ist konstant auf der Bahn $G(p)$. Da $G(p)$ zusammenhängend ist, folgt $G(p)=p$.

Die Algebra aller holomorphen Vektorfelder auf R werde mit $\Delta(R)$ bezeichnet (vgl. Anhang). Jedes $D \in \Delta(R)$ wird induziert von einer lokalen einparametrigen Transformationsgruppe $g_t = \exp(tD)$ auf R (vgl. [16]). Dabei existiert zu jeder kompakten Teilmenge $A \subset R$ ein $\varepsilon_A > 0$, so daß $g_t(p)$ für alle Punkte p von A und alle t mit $|t| < \varepsilon_A$ definiert ist. Läßt sich für alle ε_A eine positive untere Schranke finden, so kann $\exp(tD)$ als globale einparametrige Transformationsgruppe angesehen werden. In diesem Fall wollen wir das Vektorfeld D auch *vollständig* nennen.

Definition. Ein holomorphes Vektorfeld D auf einem komplexen Raum R heißt eine *infinitesimale Isometrie* (bezüglich einer stetigen Metrik ρ auf R), wenn

$$(*) \qquad \rho(g_t(x), g_t(y)) = \rho(x, y) \qquad (g_t = \exp(tD))$$

für alle rellen Zahlen t und alle Punkte $x, y \in R$ gilt, für die die linke Seite von (*) definiert ist.

Satz 2.11. *Ist R ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und ρ eine stetige Metrik auf R, so ist die Menge $\mathfrak{i}_\rho(R)$ aller infinitesimalen Isometrien auf R eine reelle Liealgebra der Dimension $\leqq n(n+2)$. Ist die Metrik ρ vollständig, so ist jede infinitesimale Isometrie vollständig, und $\mathfrak{i}_\rho(R)$ ist isomorph zur Liealgebra der Gruppe $I_\rho(R)$ aller biholomorphen Isometrien.*

Beweis. Es sei p ein Mannigfaltigkeitspunkt von R und Θ die von $\mathfrak{i}_\rho(R)$ in $\Delta(R)$ erzeugte reelle Unteralgebra. Es werde ein $\varepsilon > 0$ so klein

gewählt, daß $U=Z_\varepsilon(p)$ eine relativ-kompakte Umgebung von p ohne Singularitäten ist. Ist D eine infinitesimale Isometrie, die in p verschwindet, so gilt $g_t(U)\subset U$ für $|t|<\varepsilon'$ und $g_t=\exp(tD)$, d.h. die Beschränkung $D|U$ ist ein vollständiges Vektorfeld auf $A(U)$ und $g_t\in I_\rho(U)$. Die Zuordnung $D\to D|U$ liefert einen Lieschen Monomorphismus $\Theta\to A(U)$. Auf Grund der obigen Resultate über $I_\rho(U)$ hat deshalb die Menge Θ_p aller $D\in\Theta$, die in p verschwinden, eine Dimension $\leqq n^2$, d.h. $\dim(\Theta)\leqq n(n+2)$. Aus ([20], p. 95, Theorem III) folgt schließlich $\Theta=\mathfrak{i}_\rho(R)$. – Nehmen wir jetzt an, daß die Metrik ρ vollständig ist. Es sei $g_t=\exp(tD)$ für ein $D\in\Theta$, p ein beliebiger Punkt in R und $s>0$ eine Zahl, so daß g_t auf $A=Z_1(p)$ für alle t mit $|t|<s$ definierbar ist. Angenommen, s ist maximal gewählt und endlich. Dann gibt es ein $\delta>0$ mit $g_t(p)\in A$ für alle t mit $|t|<\delta$. Wegen $\rho(g_t(p), p)\leqq n\cdot\rho(g_{t/n}(p), p)$ für alle n ist $g_t(A)\subset Z_{1+s'}(p)=:B$ für alle t mit $|t|<s$. Da B relativ-kompakt in R liegt, ist g_t auf B für $|t|<\delta'$ definiert, d.h. s kann nur dann maximal sein, wenn $s=\infty$ gilt.

§ 3. Holomorphe Kontraktionen

Von CARATHÉODORY und CARTAN (vgl. [8, 9]) sind die inneren Abbildungen beschränkter Gebiete über dem C^n eingehend untersucht worden. Da die inneren Abbildungen solcher Gebiete Kontraktionen bezüglich einer geeigneten stetigen Metrik sind (vgl. Bemerkung 2.1), kann man fragen, welche Sätze allgemeiner für holomorphe Kontraktionen gelten. Dazu zeigen wir zunächst

Hilfssatz 3.1. *Es sei R ein komplexer Raum, ρ eine Metrik auf R und φ eine biholomorphe isometrische Abbildung von R auf eine offene Teilmenge von R. Dann gibt es einen komplexen Raum $\bar{R}$, eine Metrik $\bar{\rho}$ auf $\bar{R}$ und einen isometrischen Automorphismus $\bar{\varphi}$ von $\bar{R}$, so daß gilt*

a) R ist ein offener komplexer Unterraum von $\bar{R}$,

b) $\bar{\rho}$ stimmt auf R mit ρ überein,

c) $\bar{\varphi}$ stimmt auf R mit φ überein.

Ist ρ stetig auf R, so kann auch $\bar{\rho}$ stetig auf $\bar{R}$ gewählt werden.

Beweis. Die Menge Z aller ganzrationalen Zahlen werde in natürlicher Weise als komplexer Raum aufgefaßt. Damit ist auch $S:=R\times Z$ ein komplexer Raum in der Produktstruktur. Durch

$$f(p,k)=(\varphi p,k)\quad\text{und}\quad g(p,k)=(\varphi p,k+1)$$

werden holomorphe Abbildungen $f, g\in\mathrm{Hol}(S)$ definiert, die miteinander vertauschbar sind. Es sei (g) die feinste Äquivalenzrelation auf S, so daß jedes $x\in S$ zu $g(x)$ äquivalent ist. Der Quotientenraum $\bar{R}:=S/(g)$ werde mit der eindeutig bestimmten komplexen Struktur versehen, für die die

kanonische Projektion $\pi: S \to \bar{R}$ lokal biholomorph ist. Wegen $f \circ g = g \circ f$ gibt es genau ein $\bar{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\bar{R})$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \pi \circ f$. Sind $x=(p, k)$, $x'=(p', k')$ beliebige Punkte von $\bar{R}$ mit $k \geqq k'$, so wird durch $\bar{\rho}(x, x') = \rho(p, \varphi^{k-k'}(p'))$ eine Metrik $\bar{\rho}$ auf $\bar{R}$ festgelegt, die unter $\bar{\varphi}$ invariant ist. Ist ρ stetig, so auch $\bar{\rho}$. Vermöge der durch $p \to (p, 0)$ definierten Injektion $R \to \bar{R}$ ist R ein offener Unterraum von $\bar{R}$ mit den verlangten Eigenschaften.

Wählen wir für ρ speziell die durch $\rho(x, y) = 1$ für $x \neq y$ definierte diskrete Metrik auf R, so folgt aus diesem Hilfssatz die zuweilen nützliche

Bemerkung 3.2. *Ist R ein komplexer Raum, $D \subset R$ ein offener Unterraum von R und $\varphi: R \to D$ eine biholomorphe Abbildung, so gibt es einen komplexen Raum $\bar{R}$, der R als offenen Unterraum enthält, und einen Automorphismus $\bar{\varphi}$ von $\bar{R}$ mit $\varphi = \bar{\varphi} | R$.*

Hilfssatz 3.3. *Es sei R ein komplexer Raum mit stetiger Metrik ρ, $f_\nu: R \to R$ eine Folge holomorpher Kontraktionen und $D \subset R$ eine offene Teilmenge, die jede irreduzible Komponente von R schneidet. Gibt es dann eine holomorphe Abbildung $f: R \to R$, so daß die Folge $f_\nu | D$ gegen $f | D$ konvergiert, so konvergiert die Folge f_ν gegen f.*

Beweis. Es sei $\tau: \tilde{R} \to R$ die Normalisierung von R und $\tilde{f}_\nu = f_\nu \circ \tau$, $\tilde{f} = f \circ \tau$. Sei ferner Ω die größte offene Teilmenge von $\tilde{R}$, so daß $\tilde{f}_\nu | \Omega$ gegen $\tilde{f} | \Omega$ konvergiert. Ω ist abgeschlossen in $\tilde{R}$; denn ist $x \in \bar{\Omega}$, so wähle man $\varepsilon > 0$ so klein, daß $V = Z_\varepsilon(\tilde{f}(x))$ relativ-kompakt in R liegt und biholomorph äquivalent zu einer beschränkten lokal-analytischen Menge in einem C^n ist. Für alle $k > k_0$ und eine geeignete Umgebung U von x gilt dann $\tilde{f}_k(U) \subset V$, d.h. nach MONTEL gilt $U \subset \Omega$. Wegen $\tau^{-1}(D) \subset \Omega$ gilt somit $\Omega = \tilde{R}$. Also konvergiert auch f_ν gegen f. Q.e.d.

Es ist zu beachten, daß im allgemeinen die Konvergenz einer Folge holomorpher Kontraktionen f_ν noch nicht aus der Konvergenz der Folge $f_\nu | D$ folgt.

Unter Verwendung der Hilfssätze können wir nun zeigen

Satz 3.4. *Es sei R ein normaler zusammenhängender komplexer Raum mit stetiger Metrik ρ und f eine holomorphe isometrische Abbildung von R auf einen Teil von R. Gibt es dann einen Punkt p in R, so daß die Folge der Iterierten $f^n(p)$ wenigstens einen Häufungspunkt in R besitzt, so ist f ein Automorphismus von R, und es gibt eine kompakte abelsche Untergruppe $T \subset \mathrm{Aut}(R)$, die f enthält.*

Beweis. Als injektive Abbildung ist $f: R \to f(R)$ biholomorph (vgl. [25]). Wir wählen entsprechend Hilfssatz 3.1 einen komplexen Raum $\bar{R} \supset R$ mit stetiger Metrik $\bar{\rho}$ und in der Gruppe I aller biholomorphen Isometrien von $\bar{R}$ ein $\bar{f}$ mit $f = \bar{f} | R$. Es sei $F := \{\bar{f}^n : n > 0\}$. Da $F(p)$ nach Voraussetzung einen Häufungspunkt in R besitzt, hat wegen Satz 2.5 auch F einen Häufungspunkt in I. Da I eine Liegruppe ist, ist somit die

abgeschlossene Hülle von F eine kompakte abelsche Untergruppe $T \subset I$. Es sei nun $x \in R$ ein beliebiger Punkt und $B := T(x)$. $U := B \cap R$ ist offen in B, und es gilt $F(U) \subset U$. Für ein geeignetes $u \in U$ und $\varepsilon > 0$ gilt $K_\varepsilon(u) := \{v \in B: \bar{\rho}(v, u) < \varepsilon\} \subset U$ und somit $K_\varepsilon(\varphi u) = \varphi(K_\varepsilon(u)) \subset U$ für alle $\varphi \in F$. Da $F(u)$ dicht in B liegt, gilt somit $U = B$, d.h. $T(x) \subset R$ und insbesondere $x \in f(R)$. Da x beliebig war, folgt $R = f(R)$, und wir dürfen somit $R = \bar{R}$ annehmen. Q.e.d.

Ist R ein irreduzibler komplexer Raum, so wollen wir eine holomorphe Abbildung $g: R \to R$ *degeneriert* nennen, wenn $g(R)$ keinen inneren Punkt in R besitzt. Ist R ein Gebiet im C^n, so heißt das gerade, daß die Funktionaldeterminante auf R identisch verschwindet. Es gilt nun

Satz 3.5. *Es sei R ein irreduzibler komplexer Raum mit stetiger Metrik ρ und $f: R \to R$ eine holomorphe Kontraktion. Gibt es dann eine nicht-degenerierte holomorphe Abbildung $g: R \to R$, die Häufungspunkt der Iteriertenfolge f^n ist, so ist f ein isometrischer Automorphismus von R.*

Beweis. Nehmen wir zunächst R als normal an. Für alle $x, y \in R$ und jedes $h \in F := \{f^n g: n \geqq 0\}$ gilt offensichtlich

$$\rho(fh(x), fh(y)) = \rho(h(x), h(y)),$$

d.h. f bildet $F(R)$ isometrisch in sich ab. Das Innere D von $F(R)$ ist nach Voraussetzung nicht leer. Da R normal ist, folgt, daß $f|D$ eine offene Abbildung ist und D in sich abbildet. Da die Folge f^n einen Häufungspunkt besitzt, liegt $f|D$ nach Satz 3.4 in einer kompakten abelschen Untergruppe von $\mathrm{Aut}(D)$, und eine geeignete Teilfolge $f^{n_k}|D$ konvergiert gegen $\mathbf{1} \in \mathrm{Aut}(D)$. Wegen Hilfssatz 3.3 konvergiert dann die Folge f^{n_k} gegen die Identität auf R, d.h. f ist eine isometrische Abbildung. Nach Satz 3.4 folgt daraus $f \in \mathrm{Aut}(R)$. — Nehmen wir jetzt an, daß R ein beliebiger irreduzibler komplexer Raum ist. Es sei $\tau: \tilde{R} \to R$ die Normalisierung von R. Da g nicht degeneriert ist, ist $f(R)$ nicht ganz in der Singularitätenmenge von R enthalten, und es gibt ein $\tilde{f} \in \mathrm{Hol}(\tilde{R})$ mit $f \circ \tau = \tau \circ \tilde{f}$. Wie im Beweis zu Bemerkung 2.1 zeigt man die Existenz einer stetigen Metrik $\tilde{\rho}$ auf $\tilde{R}$, bezüglich der $\tilde{f}$ eine Kontraktion ist. Die Iteriertenfolge $\tilde{f}^n$ besitzt ein nicht-degeneriertes $\tilde{g}$ als Häufungspunkt, d.h. wegen $\tilde{R}$ normal konvergiert eine geeignete Folge $\tilde{f}^{m_k}(m_k > 0)$ gegen $\tilde{f}^{-1}$. Dann konvergiert die Folge f^{m_k} gegen f^{-1}, d.h. f ist ein isometrischer Automorphismus.

Von Carathéodory und Cartan (vgl. [8, 9]) wurde gezeigt: Ist D ein beschränktes Gebiet im C^n und $\varphi: D \to D$ eine holomorphe Abbildung mit Fixpunkt $p \in D$, so ist die Funktionaldeterminante von φ in p stets vom Betrag $\leqq 1$ und gleich 1 genau dann, wenn φ ein Automorphismus von D ist. Nun läßt sich für jeden komplexen Raum R und jedes $\varphi \in \mathrm{Hol}(R)$ mit Fixpunkt $p \in R$ ebenfalls der Begriff der *Funktionaldeterminante von*

φ *in* p definieren, nämlich als Determinante des Endomorphismus $d_p\varphi$ im Tangentialraum $T_p(R)$. Damit gilt dann (im Zusammenhang mit Bemerkung 2.1) als Verallgemeinerung des obigen Satzes

Satz 3.6. *Es sei ρ eine stetige Metrik auf dem komplexen Raum R und $\varphi\colon R \to R$ eine holomorphe Kontraktion mit Fixpunkt $p \in R$ und Funktionaldeterminante α in p. Alle irreduziblen Komponenten von R mögen durch den Punkt p laufen. Dann gilt $|\alpha| \leqq 1$, und $|\alpha| = 1$ gilt genau dann, wenn φ ein isometrischer Automorphismus von R ist.*

Beweis. Es werde ein $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß die Umgebung $U = Z_\varepsilon(p)$ relativ-kompakt in R liegt und biholomorph äquivalent ist zu einer beschränkten lokal-analytischen Menge in einem C^n. Wegen $\varphi(U) \subset U$ ist nach MONTEL und Satz 4.1 (Anhang I) die Folge der Potenzen α^ν beschränkt, d.h. $|\alpha| \leqq 1$. Ist φ insbesondere ein isometrischer Automorphismus, so ist zusätzlich $|\alpha^{-1}| \leqq 1$, d.h. $|\alpha| = 1$. – Wir wollen jetzt umgekehrt aus $|\alpha| = 1$ schließen, daß φ ein isometrischer Automorphismus ist: Wegen $\alpha \neq 0$ wird eine Umgebung von p biholomorph abgebildet, und es gibt ein $m > 0$, so daß die Potenz φ^m jede irreduzible Komponente von R in sich abbildet, d.h. wir dürfen R als irreduzibel annehmen. Bezüglich einer festgewählten Basis des Tangentialraumes $T_p(R)$ beschreibt sich $d_p\varphi$ durch eine Matrix Σ mit $\det(\Sigma) = \alpha$. Die Menge aller Potenzen von Σ ist beschränkt, d.h. wegen $\alpha \neq 0$ gibt es eine Folge natürlicher Zahlen $\nu_k > 0$, so daß die Folge Σ^{ν_k} gegen die Einheitsmatrix konvergiert. Wegen $\varphi^k(U) \subset U$ für alle k folgt aus dem Satz von MONTEL zusammen mit dem Cartanschen Eindeutigkeitssatz (vgl. Anhang I), daß die Folge $\varphi^{\nu_k}|U$ gegen $\mathbf{1} \in \mathrm{Aut}(U)$ konvergiert. Wegen Hilfssatz 3.1 konvergiert dann die Folge φ^{ν_k} gegen die Identität auf R. Also ist φ wegen Satz 3.5 ein isometrischer Automorphismus.

§ 4. Anhang

I. Transformationsgruppen und Tangentialräume

Es sei R ein (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$ (vgl. [*14*]). Der Ring $\mathcal{O}_x$ der holomorphen Funktionskeime in einem Punkt $x \in R$ besitzt genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, bestehend aus allen Nichteinheiten. Für jede natürliche Zahl $k > 1$ ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k$ ein komplexer Vektorraum endlicher Dimension. Speziell heißt $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ die Einbettungsdimension von R in x, denn $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ ist die kleinste natürliche Zahl q, so daß eine Umgebung von x als komplexer Unterraum eines Gebietes im C^q realisiert werden kann. Der duale Vektorraum von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ werde mit $T_x = T_x(R)$ bezeichnet und *Tangentialraum in x an R* genannt. Ist S ein weiterer komplexer Raum und $f\colon R \to S$ eine holomorphe Abbildung, so gehört zu f eine lineare Abbildung

f^*: $\mathfrak{m}_y \to \mathfrak{m}_x$ mit $f^*(\mathfrak{m}_y^k) \subset \mathfrak{m}_x^k$ für alle k und $y := f(x)$. f^* erzeugt somit eine lineare Abbildung $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$; die dazu duale Abbildung $d_x f$: $T_x(R) \to T_y(S)$ werde das *Differential von f in x* genannt. $d_x f$ ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktionalmatrix. Jedem komplexen Raum R ist auf natürliche Weise (vgl. [16]) ein komplexer Raum $T(R)$ zusammen mit einer holomorphen Abbildung $\pi(R)$: $T(R) \to R$ so zugeordnet, daß gilt: Für jedes $x \in R$ ist die Faser $\pi(R)^{-1}(x)$ isomorph zu Tangentialraum $T_x(R)$, und zu jeder holomorphen Abbildung f: $R \to S$ gibt es eine holomorphe Abbildung $T(f)$: $T(R) \to T(S)$, deren Beschränkung auf $T_x(R)$ mit $d_x f$ übereinstimmt. (T ist ein kovarianter Funktor auf der Kategorie der komplexen Räume.) Ist $R = M$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, so heißt $T(M)$ das Tangentialbündel von M.

In [16] ist auf der Menge $\mathrm{Hol}(R, S)$ aller holomorphen Abbildungen von R in S eine hausdorffsche Topologie definiert worden, die im Falle reduzierter Räume mit der $K0$-Topologie übereinstimmt. Insbesondere ist für jeden komplexen Raum R und jedes $n \geqq 1$ $\mathrm{Hol}(R, C^n)$ ein vollständiger, lokal-konvexer, topologischer Vektorraum (sogar ein Fréchetraum, wenn R abzählbare Topologie besitzt). Für uns wichtig ist nun die folgende Stetigkeitsaussage des Funktors T:

Satz 4.1. *Für je zwei komplexe Räume R und S ist die Abbildung T: $\mathrm{Hol}(R, S) \to \mathrm{Hol}(T(R), T(S))$ stetig.*

Beweis. Da für jedes Kompaktum $K \subset R$ und jede offene Menge $0 \subset S$ die Menge $(K, 0) = \{g \in \mathrm{Hol}(R, S)\colon g(K) \subset 0\}$ offen ist, genügt es, die Stetigkeit von T auf $(K, 0)$ nachzuweisen. Wir dürfen also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß R ein komplexer Unterraum eines Steinschen Gebietes $G \subset C^n$ und daß $S = V$ ein komplexer Vektorraum endlicher Dimension ist. Dann liefert die Zuordnung $f \to f|R$ eine stetige, lineare, surjektive Abbildung α: $\mathrm{Hol}(G, V) \to \mathrm{Hol}(R, V)$. Da beides Frécheträume sind, ist α nach dem Satz von BANACH sogar eine offene Abbildung. Nun ist die Abbildung T: $\mathrm{Hol}(G, V) \to \mathrm{Hol}(T(G), T(V))$ stetig (denn das ist nichts weiter als die bekannte Tatsache, daß bei Vorgabe von Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ in G jede partielle Ableitung $\partial/\partial z_k$ ein stetiger Operator im Raum der holomorphen Funktionen auf G ist). Insgesamt haben wir somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hol}(G, V) & \xrightarrow{T} & \mathrm{Hol}\big(T(G), T(V)\big) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ \mathrm{Hol}(R, V) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}\big(T(R), T(V)\big), \end{array}$$

in dem alle bezeichneten Abbildungen stetig sind. Da α surjektiv und offen ist, folgt daraus auch die Stetigkeit der Abbildung

$$T\colon \mathrm{Hol}(R, V) \to \mathrm{Hol}\big(T(R), T(S)\big). \qquad \text{Q.e.d.}$$

Für jeden komplexen Vektorraum V endlicher Dimension ist auch $T(V)$ ein komplexer Vektorraum, und es ergibt sich aus Satz 4.1 unmittelbar für jeden komplexen Raum R die

Folgerung 4.2. *T: $\mathrm{Hol}(R, V) \to \mathrm{Hol}(T(R), T(V))$ ist eine stetige lineare Abbildung topologischer Vektorräume.*

Für jeden komplexen Raum R ist $\mathrm{Hol}(R) := \mathrm{Hol}(R, R)$ eine topologische Halbgruppe. Wir sagen, eine topologische Halbgruppe H operiert stetig auf R, wenn ein stetiger Homomorphismus Φ: $H \to \mathrm{Hol}(R)$ gegeben ist. Besitzt H einen Fixpunkt p in R, so ist das Differential $d_p(\Phi h)$ ein Endomorphismus des Tangentialraumes T_p für jedes $h \in H$, und die Zuordnung $h \to d_p(\Phi h)$ liefert eine stetige Darstellung von H in T_p (wegen Satz 4.1). Wir sagen nun: *Für H gilt der Cartansche Eindeutigkeitssatz in einem Fixpunkt $p \in R$, wenn für jedes $\tilde{h} \in \Phi H$ mit $d_p \tilde{h} = \mathbf{1}$ eine Umgebung U von p in R existiert mit $\tilde{h} \mid U = id$ ($=$ Identität).* Ist R reduziert und laufen alle irreduziblen Komponenten von R durch p, so heißt das für eine Untergruppe $H \subset \mathrm{Hol}(R)$ gerade, daß d_p: $H \to GL(T_p)$ eine treue Darstellung ist. Es gilt nun

Satz 4.3. *Ist H eine kompakte Halbgruppe, die stetig auf R mit Fixpunkt $p \in R$ operiert, so gilt für H in p der Cartansche Eindeutigkeitssatz.*

Beweis. Der bekannte Beweis für Mannigfaltigkeitspunkte (vgl. [1]) läßt sich auch folgendermaßen allgemein durchführen:

Es sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_p$ und $\alpha_k(h)$ der von $h \in H$ für jedes $k > 0$ induzierte Endomorphismus von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k$. Die Zuordnung $h \to \alpha_k(h)$ ist stetig für alle k, und $\alpha_2(h)$ ist dual zu $d_p h$. Ist der Satz falsch, so gibt es ein $h \in H$ und ein $k > 1$ mit $\alpha_k(h) = \mathbf{1}$ und $\alpha_{k+1}(h) \neq \mathbf{1}$. Wählen wir nun eine Basis $\{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_r\}$ von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ so, daß $\{v_1, \ldots, v_s\}$ vermöge der kanonischen Projektion $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k$ eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k$ bildet und $w_1, \ldots, w_r$ in $\mathfrak{m}^k$ liegen, so beschreibt sich $\alpha_{k+1}(h)$ in dieser Basis durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} I_s & M \\ 0 & I_r \end{pmatrix},$$

wobei I_t die t-reihige Einheitsmatrix ($t = s, r$) und M eine s, r-Matrix ist. Für jede natürliche Zahl n beschreibt sich die Potenz $\alpha_{k+1}(h^n)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_s & M \\ 0 & I_r \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} I_s & nM \\ 0 & I_r \end{pmatrix},$$

woraus wegen H kompakt $M = 0$ und damit $\alpha_{k+1}(h) = \mathbf{1}$ folgen würde.

Unter der speziellen Annahme, daß H eine kompakte topologische Gruppe ist, läßt sich Satz 4.3 verschärfen zu

Satz 4.4. *Ist G eine kompakte topologische Gruppe, die auf einem komplexen Raum R mit Fixpunkt $p \in R$ stetig operiert, so gibt es eine G-invariante Umgebung U von p, einen komplexen Unterraum A eines Gebietes D im Tangentialraum $V := T_p(R)$ und eine biholomorphe Abbildung $\tau\colon U \to A$ mit $d_p g \circ \tau | U = \tau \circ g | U$ für alle $g \in G$.*

Im Falle, daß R reduziert und p ein Mannigfaltigkeitspunkt ist, ergibt Satz 4.4 gerade die bekannte Tatsache, daß in einer Umgebung von p lokale Koordinaten eingeführt werden können, in denen jedes $g \in G$ linear ist. Der Beweis von Satz 4.4 ergibt sich unmittelbar (für $L = d_p$) aus dem folgenden Satz 4.5. Dabei sei μ das Haarsche Maß auf G, und für jede stetige Abbildung f von G in einen lokal-konvexen, hausdorffschen, vollständigen, topologischen Vektorraum E sei

$$\int_G f \, d\mu \in E$$

im Sinne von ([6], p. 80) verstanden. Es gilt

Satz 4.5. *Es sei G eine kompakte Transformationsgruppe auf einem komplexen Raum R, V ein komplexer Vektorraum endlicher Dimension und $L\colon G \to GL(V)$ eine stetige Darstellung von G in V. Ist ferner $\varphi\colon R \to V$ eine holomorphe Abbildung und $f\colon G \to \mathrm{Hol}(R, V)$ die durch $f(g) = L(g^{-1}) \circ \varphi \circ g$ definierte Abbildung, so gilt:*

$$\tau := \int_G f \, d\mu$$

ist eine holomorphe Abbildung $\tau\colon R \to V$, so daß für jedes $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{g} & R \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ V & \xrightarrow{L(g)} & V \end{array}$$

kommutiert. Für die Tangentialabbildung $T(\tau)\colon T(R) \to T(V)$ gilt überdies

$$T(\tau) = \int_G T(f) \, d\mu$$

(d.h. insbesondere $d_p \tau = \int_G d_p f \, d\mu$ für jeden Punkt p in R).

Beweis. Wegen

$$\tau(p) = \int_G f(g)(p) \, d\mu(g)$$

für alle p in R gilt für $h \in G$:

$$\tau \circ h = \int_G f(g) \circ h \, d\mu(g) = \int_G L(h) \circ f(gh) \, d\mu(g)$$
$$= L(h) \circ \int_G f(gh) \, d\mu(g)$$

[da $\sigma \to L(h) \circ \sigma$ einen stetigen, linearen Automorphismus von $\mathrm{Hol}(R, V)$ definiert, der somit vorgezogen werden kann]

$$= L(h) \circ \tau, \qquad \text{da } \mu \text{ } G\text{-invariant ist.}$$

Die letzte Behauptung ist eine einfache Konsequenz von Folgerung 4.2.

II. Transformationsgruppen und Modifikationen

Es sei im folgenden R ein reduzierter komplexer Raum. Ein komplexer Raum R' zusammen mit einer eigentlichen[1] holomorphen Abbildung $\pi: R' \to R$ heißt eine *eigentliche Modifikation von* R, wenn in R bzw. R' offene und dichte Teilmengen V bzw. V' existieren, die vermöge π biholomorph aufeinander abgebildet werden. Nach einem in [17] (vgl. auch [25]) angegebenen Verfahren kann man eigentliche Modifikationen konstruieren: Es sei $H(R)$ der Raum aller holomorphen Funktionen auf R und $K(R)$ der $H(R)$-Modul aller meromorphen Funktionen auf R. Ist dann $f = \{f_0, \ldots, f_r\}$ eine endliche Teilmenge von $K(R)$, die außerhalb einer dünnen Menge $N \subset R$ holomorph ist und vermöge $p \to (f_0(p), \ldots, f_r(p))$ eine holomorphe Abbildung f von $R - N$ in den komplex-projektiven Raum P_r vermittelt, so ist die abgeschlossene Hülle G_f von $\{(p, f(p)): p \in R - N\}$ in $R \times P_r$ analytisch und vermöge der kanonischen Projektion $\pi_f: G_f \to R$ eine eigentliche Modifikation von R. Ist nun φ eine biholomorphe Abbildung von R auf einen komplexen Raum S und $g \subset K(S)$ eine endliche Teilmenge derart, daß f und $g \circ \varphi$ den gleichen Untermodul von $K(R)$ erzeugen, so gibt es genau eine

(*) biholomorphe Abbildung $\overline{\varphi}: G_f \to G_g$ mit $\pi_g \circ \overline{\varphi} = \varphi \circ \pi_f$.

Bezeichnen wir die Garbe aller meromorphen Funktionskeime auf R mit $\mathcal{M}$, so gilt deshalb für jede kohärente Idealgarbe $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$, deren Null-, Pol-, und Unbestimmtheitsstellen in einer dünnen Menge von R liegen: Es gibt genau eine eigentliche Modifikation $\pi: R_{\mathcal{I}} \to R$, so daß für jede offene Menge $U \subset R$ und jede endliche Menge $f \subset H^0(U, \mathcal{I})$, die $\mathcal{I} \mid U$ über der Strukturgarbe erzeugt, die Modifikation $\pi \mid U: \pi^{-1}(U) \to U$ isomorph ist zu $\pi_f: G_f \to U$ (vgl. [17]).

Vermöge $m \to m \circ g^{-1}$ operiert $\mathrm{Aut}(R)$ als topologische Transformationsgruppe auf $\mathcal{M}$. Ist $G \subset \mathrm{Aut}(R)$ eine Untergruppe mit $G(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$, so existiert wegen (*) genau ein stetiger Homomorphismus $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(R_{\mathcal{I}})$ mit $\pi_{\mathcal{I}} \circ \alpha(g) = g \circ \pi_{\mathcal{I}}$ für alle $g \in G$. G-invariante kohärente Idealgarben $\mathcal{I}$ erhält man z. B., wenn man die Garbe aller auf einer dünnen, G-invarianten analytischen Teilmenge von R verschwindenden holomorphen Funktionskeime nimmt. Damit haben wir

Satz 4.6. *Ist G eine stetige Transformationsgruppe eines komplexen Raumes R der reinen Dimension n und $A \subset R$ eine G-invariante (dünne)*

analytische Teilmenge, so gibt es eine eigentliche Modifikation $\pi\colon S\to R$ *von* R *und einen stetigen Homomorphismus* $\alpha\colon G\to \mathrm{Aut}(S)$, *so daß für jedes* $g\in G$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha(g)} & S \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ R & \xrightarrow{g} & R \end{array}$$

kommutiert und $\pi^{-1}(A)$ *die reine Dimension* $n-1$ *besitzt.*

Für den speziellen Fall, daß A aus einem Punkt $p\in R$ besteht und $\mathcal{I}$ die Garbe aller in p verschwindenden holomorphen Funktionskeime ist, heißt $K_p=\pi^{-1}(p)\subset R_{\mathcal{I}}$ der *projektive Tangentenkegel* in p. Denn ist p der Nullpunkt des C^m und R eine analytische Teilmenge einer Umgebung von p in C^m, so induziert der in [26] definierte Tangentenkegel

$$C(R,p)=\{v\in C^m\colon \text{es gibt eine Folge } (\alpha_\nu, v_\nu) \text{ in } C\times R \text{ mit } \lim(v_\nu)=0 \text{ und } \lim(\alpha_\nu v_\nu)=v\}$$

im P_{m-1} eine analytische Teilmenge, die zu K_p isomorph ist.

III. Transformationsgruppen auf Gebieten des C^n

Es sei $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe eines komplexen Raumes R. Eine stetige Abbildung $D\colon \mathcal{O}\to\mathcal{O}$, deren Beschränkung auf jeden Halm $\mathcal{O}_x$ eine Derivation von $\mathcal{O}_x$ ist, heißt eine *infinitesimale Transformation von* R oder auch ein *holomorphes Vektorfeld auf* R. Die Gesamtheit aller infinitesimalen Transformationen von R ist vermöge $[D,D']=D\circ D'-D'\circ D$ eine komplexe Liealgebra $\Delta(R)$. Wird das Vektorfeld $D\in\Delta(R)$ von einer einparametrigen Transformationsgruppe $g_t=\exp(tD)$ auf R erzeugt, so heißt D *vollständig*. Ist $G\subset\mathrm{Aut}(R)$ eine Untergruppe, so heißt ein vollständiges Vektorfeld D auf R ein *G-Vektorfeld*, wenn für alle reellen Zahlen t $\exp(tD)\in G$ gilt. Δ_G sei die von der Menge aller G-Vektorfelder erzeugte reelle Unteralgebra von $\Delta(R)$. Aus bekannten Sätzen über differenzierbare Vektorfelder (vgl. [20]) folgt

Bemerkung 4.7. *Besitzt* Δ_G *endliche Dimension, so ist jedes Element von* Δ_G *ein G-Vektorfeld, und es gibt genau eine Liegruppenstruktur auf G (im allgemeinen nicht in der $K0$-Topologie), so daß G eine relle Transformationsgruppe auf R mit infinitesimaler Transformationsgruppe (vgl. [16]) Δ_G ist.*

Wir wollen deshalb $G\subset\mathrm{Aut}(R)$ eine *Liesche Transformationsgruppe* auf R nennen, wenn Δ_G endliche Dimension besitzt.

Ist V ein Gebiet im C^n mit den Koordinaten $z=(z_1, \ldots, z_n)$, so läßt sich jedes holomorphe Vektorfeld auf V schreiben in der Form

$$f(z)\frac{\partial}{\partial z},$$

wobei $f(z)=(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ ein n-Tupel holomorpher Funktionen auf V ist und $\partial/\partial z$ den Spaltenvektor $(\partial/\partial z_k)$ mit $1\leqq k\leqq n$ bedeutet. Man kann f auch als holomorphe Abbildung $V\to C^n$ ansehen und das Vektorfeld

$$f(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

als Vorschrift deuten, die in jedem Punkt p von V den Vektor $f(p)$ anheftet. Der Einfachheit halber werde deshalb im folgenden $\Delta(V)$ mit der Menge aller holomorphen Abbildungen $V\to C^n$ identifiziert; das Produkt der Felder $f(z)$ und $g(z)$ ergibt sich dann durch den Ausdruck

$$f(z)\frac{\partial g(z)}{\partial z}-g(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z}.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wollen wir im folgenden annehmen, daß V den Nullpunkt 0 des C^n enthält. Jedes $f(z)\in\Delta(V)$ läßt sich in einer Umgebung von 0 in der Form

$$\sum_0^\infty p_\nu(z)$$

schreiben, wobei $p_\nu(z)$ ein homogenes Polynom (genauer n-Tupel von homogenen Polynomen) vom Grade ν ist. Das Vektorfeld $p_0+p_1(z)$ heißt der *affine Teil* von $f(z)$. – Es sei jetzt eine Untergruppe $G\subset\mathrm{Aut}(V)$ gegeben, wobei die Isotropiegruppe G_0 im Nullpunkt den Cartanschen Eindeutigkeitssatz erfülle. Das bedeutet insbesondere, daß G eine Liesche Transformationsgruppe ist und daß jedes G-Vektorfeld eindeutig durch seinen affinen Teil bestimmt ist. Nehmen wir weiter an, daß G für jedes reelle t die Transformation $z\to e^{it}z$ enthält, d.h. daß iz ein G-Vektorfeld ist. Mit einem einfachen Trick (vgl. [1], Satz 64) folgt dann bereits, daß G_0 nur aus linearen Transformationen besteht. Aber auch Δ_G ist dadurch weitgehend eingeschränkt, denn es gilt

Hilfssatz 4.8. *Jedes G-Vektorfeld ist ein Polynom vom Grade $\leqq 2$.*

Beweis. Liegt

$$f(z)=\sum_0^\infty p_\nu(z) \qquad \text{in } \Delta_G,$$

so auch

$$g(z)=[f(z), iz]=\sum_0^\infty i(1-\nu)\,p_\nu(z)$$

und

$$h(z)=[iz,[g(z), iz]]=\sum_0^\infty i(1-\nu)^3\,p_\nu(z).$$

Da $g(z)$ und $h(z)$ gleichen affinen Teil haben, gilt somit $g(z)=h(z)$, d.h. $p_\nu=0$ für $\nu>2$.

Ist nun speziell $V=C^n$ und $GA(V)$ die Gruppe aller affinen Transformationen von V, so gilt weiter

Satz 4.9. *Es sei $G\subset \mathrm{Aut}(V)$ eine zusammenhängende transitive Liesche Transformationsgruppe auf V und T ein maximaler Torus (d.h. eine maximale kompakte abelsche zusammenhängende Untergruppe) in $GA(V)$. Gilt dann $T\subset G_p\subset GA(V)$ für die Isotropiegruppe eines Punktes $p\in V$, so ist G eine Untergruppe von $GA(V)$.*

Beweis. Nach einer geeigneten affinen Koordinatentransformation von V dürfen wir annehmen, daß $p=0$ gilt und G den maximalen Torus

$$\{(z_1,\ldots,z_n)\to(e^{it_1}z_1,\ldots,e^{it_n}z_n):\ (t_1,\ldots,t_n)\in R^n\}$$

enthält, daß also

$$X_k:=iz_k\frac{\partial}{\partial z_k}$$

für jedes k ein G-Vektorfeld ist. Da G transitiv operiert, gibt es ein

$$X=f(z)\frac{\partial}{\partial z}\in\Delta_G \qquad \text{mit } f(0)=(1,0,\ldots,0).$$

Es genügt offensichtlich zu zeigen, daß $f(z)$ konstant ist. Zunächst ist wegen Hilfssatz 4.8 $f(z)$ ein Polynom vom Grade $\leqq 2$, und wir dürfen sogar annehmen, daß $q(z)=f(z)-f(0)$ homogen vom Grade 2 ist (sonst betrachte man das Feld $[iz,[f(z),iz]]$ auf V). Da für $n=1$ nichts zu zeigen ist, sei also $n>1$. Für jedes $k>1$ verschwindet der affine Teil von $[X,X_k]$, d.h. $[X,X_k]=0$, und somit existieren komplexe Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ mit $q_j(z)=\alpha_j z_1 z_j$ für $j=1,2,\ldots,n(q=(q_1,\ldots,q_n))$. Da im C^1 jedes vollständige holomorphe Vektorfeld affin ist, folgt notwendig $\alpha_1=0$. Angenommen, es gibt ein k mit $\alpha_k\neq 0$. Da z_1 vor den übrigen Koordinaten nicht ausgezeichnet ist, gibt es komplexe Zahlen $\beta_1,\ldots,\beta_n$, so daß

$$Y=h(z)\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{mit} \quad h_s(z)=\begin{cases}1 & \text{für } s=k\\ \beta_s z_k z_s & \text{sonst}\end{cases}$$

in Δ_G liegt. Da $[X, Y]$ keinen Bestandteil dritten Grades enthalten kann, müssen alle β_s verschwinden, und $h(z)$ ist konstant. Als Linearkombination von Y und

$$\left[Y, iz\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

ist auch $\alpha_k Y$ ein G-Vektorfeld. Da $\alpha_k Y$ und $[X, [Y, X]]$ gleichen affinen Teil besitzen und somit übereinstimmen, folgt im Gegensatz zur obigen Annahme $\alpha_k = 0$, d.h. $f(z)$ konstant.

Als Folgerung ergibt sich für $V = C^n$

Satz 4.10. *Jede Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}(V)$, die wenigstens eine kompakte Isotropiegruppe G_p der Dimension n^2 besitzt, ist in $\mathrm{Aut}(V)$ zu einer Untergruppe der affinen Gruppe $GA(V)$ konjugiert.*

Beweis. Wegen Folgerung 1.10 dürfen wir $G_p \subset GA(V)$ annehmen. G ist eine Liesche Transformationsgruppe, die G_p als zusammenhängende Untergruppe enthält. Ist G_p Normalteiler in G, so gilt $G = G_p$, da G_p genau einen Fixpunkt besitzt. Wir dürfen also annehmen, daß G_p kein Normalteiler in G ist. Dann ist G_p echt in der Einskomponente von G enthalten, d.h. G ist zusammenhängend und operiert transitiv auf V. Aus Satz 4.9 folgt dann $G \subset GA(V)$.

Für jeden kompakten komplexen Raum wie auch für jedes beschränkte Gebiet im C^n ist die Automorphismengruppe eine Liegruppe, und jede homogene Mannigfaltigkeit dieser Gestalt schreibt sich deshalb in der Form G/I, wobei $I \subset G$ reelle Liegruppen sind. Durch Beispiele wollen wir zeigen, daß das im allgemeinen nicht möglich ist.

Dazu wollen wir das folgende topologische Kriterium verwenden

Bemerkung 4.11. *Ist I abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G, so ist für jedes $k > 1$ die Homotopiegruppe $\pi_k(G/I)$ endlich erzeugt.*

Beweis. Da alle Homotopiegruppen einer zusammenhängenden Liegruppe abelsch sind, genügt es wegen der exakten Homotopiesequenz zu zeigen, daß jede Homotopiegruppe einer zusammenhängenden Liegruppe H endlich erzeugt ist. Das kann z.B. in der folgenden Weise durch Induktion über $\dim(H)$ geschehen: Wegen der Iwasawa-Zerlegung von H stimmt die Homotopie von H mit der Homotopie einer maximal kompakten Untergruppe $K \subset H$ überein, d.h. nach Induktionsvoraussetzung dürfen wir $\dim(K) = \dim(H)$ und somit $K = H$ annehmen. Als abelsche Gruppe stimmt $\pi_1(H)$ mit der ersten Homologiegruppe von K überein, d.h. $\pi_1(H)$ ist endlich erzeugt. Ist K die universelle Überlagerung von K, so gilt $\pi_k(K) = \pi_k(\tilde{K})$ für alle $k > 1$, d.h. wir dürfen $K = \tilde{K}$ annehmen. Für eine einfach zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit sind jedoch alle Homotopiegruppen endlich erzeugt (vgl. z.B. [23], p. 132).

Beispiele für homogene Gebiete im C^n, auf die sich das Kriterium anwenden läßt, erhalten wir durch

Bemerkung 4.12. *Es seien U, V komplexe Vektorräume endlicher Dimension und $A \subset U$ eine Teilmenge, für die eine holomorphe Abbildung f: $U \to V$ existiert mit $A = f^{-1}(0)$ [z.B. existiert nach [13] im Falle $\dim(U) \leqq \dim(V)$ zu jeder analytischen Teilmenge $A \subset U$ ein derartiges f]. Dann ist*

$$M := \{(u, v) \in U \times V: u \notin A \text{ oder } v \neq 0\}$$

ein homogenes Gebiet in $U \times V$.

Beweis. Es sei L die Gruppe aller linearen Transformationen des Vektorraumes $U \times V$, die $U \times \{0\}$ punktweise festhalten. Die von L und dem Automorphismus

$$(u, v) \to (u, v + f(u))$$

aufgespannte Gruppe operiert dann transitiv auf M.

Wählen wir nun im $C^n (n \geqq 2)$ eine diskrete unendliche Teilmenge A, die ganz in einem linearen Unterraum der Dimension 1 enthalten ist, so ist also das Komplement M von A ein homogenes Gebiet im C^n, dessen Homotopiegruppe $\pi_{2n-1}(M)$ nicht endlich erzeugbar ist. Damit haben wir

Satz 4.13. *Es gibt im C^n $(n \geqq 2)$ einfach zusammenhängende homogene Gebiete, auf denen keine Liegruppe (mit abzählbar vielen Komponenten) transitiv operieren kann.*

Man kann nun fragen, ob es sogar Steinsche Gebiete im C^n mit den im Satz 4.13 angegebenen Eigenschaften gibt. Das obige Konstruktionsverfahren versagt jedoch in diesem Falle, denn man hätte das Komplement M einer Hyperfläche $A \subset C^n$ zu bilden. Aus der Tatsache, daß $\pi_1(M)$ nicht endlich erzeugbar ist, kann jedoch nichts geschlossen werden, denn Bemerkung 4.11 ist für $k = 1$ nicht richtig (z.B. besitzt bereits $GL(2, C)$ diskrete Untergruppen, die nicht endlich erzeugbar sind).

Literatur

[1] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. d. Math. 3. Berlin: Springer 1934.

[2] Bochner, S., and W.T. Martin: Several complex variables. Princeton: Princeton University Press 1948.

[3] —, and D. Montgomery: Groups on analytic manifolds. Ann. Math. **48**, 659—669 (1947).

[4] Borel, A., u. R. Remmert: Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **145**, 429—439 (1962).

[5] Bourbaki, N.: Topologie générale. Chap. 3. Paris: Hermann 1960.

[6] — Intégration. Chap. 3. Paris: Hermann 1965.

[7] CARATHÉODORY, C.: Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **97**, 76—98 (1927).
[8] — Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen mehreren Veränderlichen erzeugt werden. Math. Z. **34**, 758—792 (1932).
[9] CARTAN, H.: Sur les fonctions de plus variables complexes. Math. Z. **35**, 760—773 (1932).
[10] — Sur les groupes de transformations analytiques. Act. Sci. Ind. 198. Paris: Hermann 1935.
[11] CHEVALLEY, C.: Theory of Lie groups. Princeton: Princeton University Press 1946.
[12] VAN DANTZIG, D., u. B.L. VAN DER WAERDEN: Über metrisch homogene Räume. Abh. Math. Sem. Hamburg **6**, 367—376 (1928).
[13] FORSTER, O., u. K.J. RAMSPOTT: Über die Darstellung analytischer Mengen. Sb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **1963**, 89—99 (1964).
[14] GRAUERT, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie. Publ. Math. **5**, 233—292 (1960).
[15] —, u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958).
[16] KAUP, W.: Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume. Math. Ann. **160**, 72—92 (1965).
[17] KUHLMANN, N.: Projektive Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **139**, 217—238 (1960).
[18] LICHNEROWICZ, A.: Géométrie des Groupes de Transformations. Paris: Dunod 1958.
[19] OTTE, M.: Beiträge zur Theorie der komplexen Liegruppen. Dissertation Göttingen 1967.
[20] PALAIS, R.: A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Mem. AMS 22 (1957).
[21] — On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. Ann. Math. **73**, 295—323 (1961).
[22] PESCHL, E.: Über den Cartan-Carathéodoryschen Eindeutigkeitssatz. Math. Ann. **119**, 131—139 (1943).
[23] POSTNIKOV, M.M.: Investigations in the homotopy theory. AMS Translations (Ser. 2) **7**, 1—134 (1957).
[24] REIFFEN, H.J.: Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik. Math. Ann. **161**, 315—324 (1965).
[25] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957).
[26] WHITNEY, H.: Local properties of analytic varieties. Princeton: Princeton University Press 1965.

Mathematisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg
852 Erlangen, Bismarckstr. $1^1/_2$

(*Eingegangen am 12. Januar/4. März 1967*)

Lebenslauf

Am 30. Oktober 1937 wurde ich in Haselünne, Kreis Meppen als erstes Kind des Mittelschullehrers Wilhelm Kaup und seiner Ehefrau Elisabeth Kaup, geb. Sunder-Plaßmann, geboren. Nach dem Besuch der Grundschule wurde ich 1948 in die städt. Mittelschule zu Haselünne eingeschult. Im Jahr 1951 nahm mein Vater in Lingen die Stelle des Mittelschulrektors an, und die Familie zog nach Lingen um. Ich besuchte daher jetzt das Gymnasium Georgianum in Lingen und legte dort 1957 die Reifeprüfung ab.
Zum Sommersemester 1957 begann ich in Münster das Studium der Mathematik und Physik. Die Richtung meines weiteren Studiums wurde wesentlich beeinflußt von Herrn Prof. Dr. H. Tietz, sowie Herrn Prof. Dr. H. Hermes, der mich zur Beschäftigung mit der mathematischen Logik anregte. Zum Wintersemester 1960/61 folgte ich Herrn Prof. Dr. R. Remmert nach Erlangen, um unter seiner Anleitung im Gebiet der komplexen Analysis zu arbeiten. Im Jahre 1962 wurde ich mit der Arbeit "Holomorphe Vektorfelder und Transformationsgruppen komplexer Räume" an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg promoviert. Seit dem 1. Oktober 1962 bin ich wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg. Im Sommer-Semester 1966 habilitierte ich mich mit einer Arbeit über "Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen" an der gleichen Fakultät.